



**Jerzy GAJDEK**

Geodeta uprawniony (1,2,4), absolwent Technikum Geodezyjnego w Jarosławiu i Wydziału GiK Politechniki Warszawskiej. Laureat konkursu „Dyplom dla Warszawy”. Pracował m. in. w przedsiębiorstwie budowlanym, biurze projektów, Technikum Geodezyjnym w Rzeszowie i jako st. wykładowca na Politechnice Rzeszowskiej, gdzie na Wydziale Budownictwa, Inżynierii Środowiska i Architektury założył Koło Naukowe Geodetów „GLOB”, będąc jego opiekunem przez 10 lat. Prowadził również działalność gospodarczą w ramach własnej firmy „NADIR”. Autor 64 publikacji inżynierskich. Pracował też jako geodeta na dwóch kontraktach: w Rumunii i Algierii.

## Metoda najmniejszych kwadratów w obliczaniu błędów średnich mierzonych szczegółów terenowych

### 1. Wstęp

Określanie dokładności pomiaru szczegółów, zwłaszcza z I grupy dokładnościowej ( $m_p \leq 0,10$  m), było zaniechane od początku stosowania Instrukcji Technicznej G-4 Pomiaru Sytuacyjne i Wysokościowe z 1979 roku. Dopiero po ćwierćwieczu GUGiK zreflektował się i zlecił dr. Adamowi Doskoczowi z UWM w Olsztynie **ekspertyzę dotyczącą zasad i dokładności pomiarów wykonywanych metodą biegunową i metodą domiarów prostokątnych** [4]. Ponieważ w rozporządzeniu [1] utrzymano te same metody (oraz rzadziej stosowane jak wcięcia kątowe, liniowe i kątowno-liniowe [§32]) to **ekspertyza jest nadal przydatna**. Rozważania odnośnie dokładności pomiarów powtórzone zostały w *Geodesia et Descriptio Terrarum* [5]. Trzeba jednak nadmienić, że wcześniej zagadnieniu dokładności pomiarów wykonywanych metodą biegunową i metodą domiarów prostokątnych poświęcił prof. Stanisław Latoś opracowanie [3]. Obydwie metody dla obliczania współrzędnych poszczególnych mierzonych punktów to konstrukcje jednoznacznie wyznaczalne i obydwaj panowie zastosowali w przeprowadzanych analizach prawo przenoszenia się błędów średnich Gaussa, co też przewiduje się w [1-§14]. A w rozporządzeniu [1] przytoczony jest

tylko ułomny wzór na określenie dokładności pomiaru metodą biegunową –

$$m_{p(pom)} = \sqrt{m_a^2 + d^2 \cdot x \frac{m_z^2}{\rho^2}} \quad (1),$$

natomiast dla metody rzędnych i odciętych opisanej w [1-§ 34] nie podano wzoru na dokładność pomiaru. Niektóre programy obliczeniowe są jednak przygotowane do określania błędów średnich obliczanych współrzędnych w oparciu o prawo przenoszenia się błędów średnich Gaussa. Ja jednak w niniejszej publikacji zaproponuję innowacyjne, właściwsze podejście do zagadnienia. **Błędy średnie szczegółów też będzie można obliczać metodą najmniejszych kwadratów.**

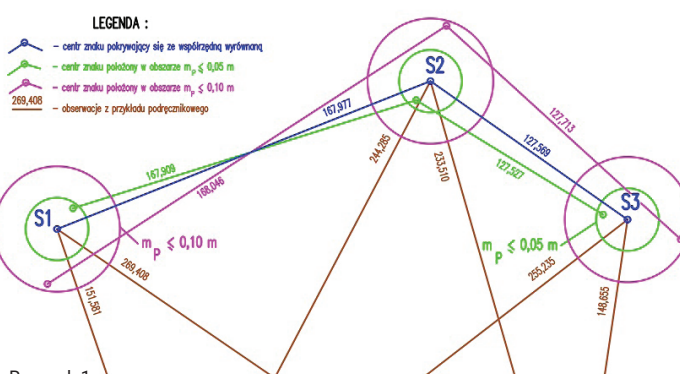
### 2. Wcześniej o problemach związanych z wyrównywaniem pomiarowych osnów sytuacyjnych (POS)

Wyrównaniu metodą najmniejszych kwadratów (MNK) POS poświęciłem trzynastą publikację. Pierwsza z nich ukazała się 22 lata temu [10]. Ustawowy obowiązek stosowania MNK do wyrównań POS zaistniał dopiero sześć lat temu w 2011 roku [1-§18.1]. Można jednak zaryzykować stwierdzenie, że mimo to nadal „**znaczna populacja**” geodetów uprawnionych nie ma pojęcia o procesie obliczeniowym w MNK. Pewnym wybawieniem dla ich niewiedzy stało się rozporządzenie [1-§17], gdzie m.in. stwierdzono: „Pomiarową osnowę sytuacyjną (POS) wyznacza się w nawiązaniu do poziomej osnowy geodezyjnej (POG) w postaci sieci punktów wyznaczonych metodą precyzyjnego pozycjonowania przy pomocy GNSS”. Ale to samo rozporządzenie zwraca też uwagę na ograniczenia stosowania technologii GNSS [1-§8], co w połączeniu z terenami o gęstej zabudowie, zalesionymi itp. stanowić będzie znaczny obszar kraju, gdzie rozwinięcie POS **metodą klasyczną** będzie jedynym rozwiązaniem. Poza tym, jeżeli moja propozycja wyliczania błędów średnich mierzonych szczegółów MNK zyska akceptację, to przypomnienie sobie elementarnych treści z rachunku wyrównawczego i umiejętność posługiwania się właściwym programem obliczeniowym powinno stać się obowiązkiem każdego uprawnionego geodety. Poniżej przedstawię wybrane problemy, z którymi będziemy mieli do czynienia pod-

czas wyrównywania MNK pomiarowych osnów sytuacyjnych i mierzonych szczegółów sytuacyjnych.

#### 2.1. Co powinno się robić z obserwacjami pomiędzy punktami nawiązania (stałymi)

Jeżeli z dwóch zapytanych przeze mnie profesorów, specjalistów w zakresie rachunku wyrównawczego, jeden twierdzi, że obserwacje pomiędzy punktami stałymi powinny wchodzić do wyrównania POS, a drugi twierdzi, że nie i jeżeli z trzech najpopularniejszych w Polsce programów obliczeniowych dwa przyjmują takie obserwacje, a trzeci je odrzuca, to przyznać musimy, że **istnieje poważny problem. Problem, który powinien być rozstrzygnięty przez GUGiK. Nie można obliczać błędów średnich mierzonych szczegółów terenowych w oparciu o wyrównane POS mogące mieć dwa alternatywne wyniki.** Osobiście uważam, że obserwacje pomiędzy punktami stałymi powinny być wykorzystywane w procesie wyrównania MNK. Uzasadnienie przedstawię w postaci konkretnych wyliczeń przykładu z podręcznika prof. Zbigniewa Wiśniewskiego [12 – str. 300] osadzonych w realiach rozporządzenia o osnowach [13]. Rysunki 1 i 2 oparte na rysunku 5.1.21 z [12] będą ilustracją do części przedstawionych obliczeń. Warto też dodać, że pracując kiedyś nad artykułem [11], przewertowałem osiem podręczników do rachunku wyrównawczego autorstwa profesorów: Barana, Czaji, Hausbrandta, Kochmańskiego, Langa, Osady, Skórczyńskiego i Warchałowskiego i w żadnym z nich nie zetknąłem się z zaleceniem włączania do wyrównania obserwacji pomiędzy punktami stałymi. Również prof. Wiśniewski nie uważa tego zagadnienia w podręczniku [12].

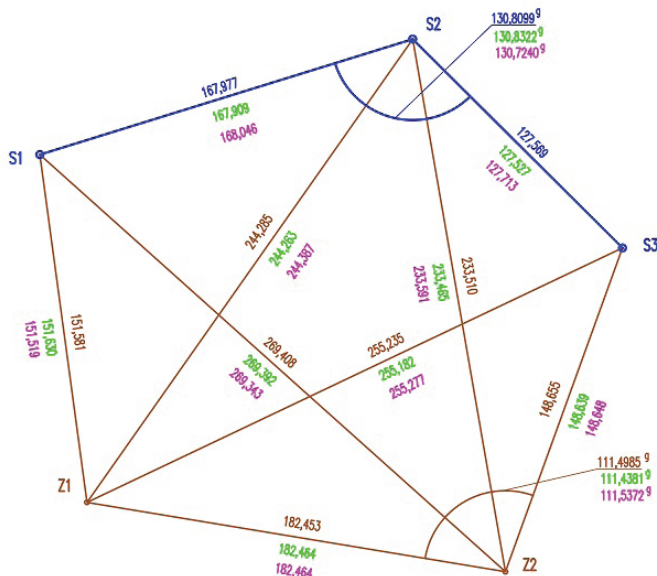


Rysunek 1.

Przed przedstawieniem poszczególnych wariantów obliczeń należy odnotować fakt podstawowy – **zaistniała pełna zgodność pomiędzy obliczeniami sieci w podręczniku profesora Wiśniewskiego a wyliczeniem przedstawionego zagadnienia w systemie obliczeniowym C-GEO.**

#### 2.2. Obliczenie współrzędnych punktów Z1 i Z2 przy założeniu, że średnie błędy punktów nawiązania są praktycznie zaniedbywalne ( $m_p \leq 0,01$ m)

- Kryterium  $m_p \leq 0,01$  m zgodnie z [13] powinny spełniać:
- osnowa podstawowa fundamentalna (osnowa 1 klasy),
  - osnowa podstawowa bazowa (osnowa 2 klasy).



Rysunek 2.

Przedstawiona tabela 1 oprócz danych z [12] zawiera dodatkowo 3 obserwacje wyliczone ze współrzędnych punktów nawiązania (167,977 m; 127,569 m; 130,8099<sup>g</sup>). Takie podejście do zagadnienia pozwoliło na wykazanie, że poprawki do tych obserwacji są wartościami zerowymi. Natomiast

Tabela 1.

WYRÓWNANIE ŚCISŁE								
(metodą najmniejszych kwadratów)								
Ilość obserwacji nadliczbowych: 7 (wersja książkowa – 4 obserwacje nadliczbowe)								
PUNKTY NAWIĄZANIA – S1, S2, S3								
m0= 0.8; Układ lokalny								
Numer	X	Y	mx	my	mp			
S1	1400.200	2389.750	0.000	0.000	0.000			
S2	1450.080	2550.150	0.000	0.000	0.000			
S3	1359.880	2640.360	0.000	0.000	0.000			
WSPÓRZĘDNE PRZYBLIŻONE								
Numer	X	Y	mx	my	mp			
Z1	1249.981	2410.023	0.021	0.021	0.030			
Z2	1220.006	2590.026	0.021	0.021	0.030			
WSPÓRZĘDNE WYRÓWNANE								
Numer	X wyr.	Y wyr.	mx	my	mp	A	B	Az A
Z1	1249.957	2410.024	0.010	0.013	0.016	0.014	0.008	133.1267
Z2	1220.006	2590.013	0.005	0.009	0.011	0.010	0.005	77.5077
KĄTY								
L	C	P	Kąt	mK	popr.	Kąt wyr.	mK w	
Z1	Z2	S3	111.4985	0.0015	-0.0005	111.4980	0.0012	
S3	S2	S1	130.8099	0.0000	0.0000	130.8099	0.0000	
ODLEGŁOŚCI								
P	K	D	mD	D zred.	popr.	D wyr.	mD w	
S1	Z1	151.581	0.020	151.5810	0.0233	151.604	0.011	
S2	Z1	244.285	0.020	244.2850	0.0186	244.304	0.008	
Z1	S3	255.235	0.020	255.2350	-0.014	255.220	0.010	
Z1	Z2	182.453	0.020	182.4530	0.0109	182.464	0.013	
S1	Z2	269.408	0.010	269.4080	-0.010	269.398	0.006	
S2	Z2	233.510	0.010	233.5100	-0.008	233.502	0.005	
S3	Z2	148.655	0.010	148.6550	0.0040	148.659	0.007	
S1	S2	167.977	0.000	167.9770	-0.000	167.977	0.000	
S2	S3	127.569	0.000	127.5690	0.0000	127.569	0.000	

współrzędne wyrównane i poprawki do pozostałych obserwacji są identyczne jak w wyrównaniu książkowym, tylko zmniejszyły się błędy średnie ( $m_{z1}$  z 0,022 m na 0,016 m oraz  $m_{z2}$  z 0,014 m na 0,011 m) z tej racji, że doszły 3 obserwacje.

### 2.3. Obliczenie współrzędnych punktów Z1 i Z2 przy założeniu, że średnie błędy punktów nawiązania $m_p \leq 0,05$ m oraz $m_p \leq 0,10$ m

Powyższe kryteria mają spełnić:

- szczegółowa pozioma osnowa geodezyjna (osnowa 3 klasy) – punkty dotychczasowej osnowy 2 klasy, gdzie  $m_p \leq 0,05$  m;
- szczegółowa pozioma osnowa geodezyjna (osnowa 3 klasy) – punkty dotychczasowej osnowy 3 klasy, gdzie  $m_p \leq 0,10$  m.

Ponadto szczegółową poziomą osnowę geodezyjną 3 klasy mają stanowić nowo zakładane punkty o  $m_p \leq 0,07$  m.

W dalszej części artykułu przedstawione zostaną dwie tabele z wyliczeniami, które burzą dotychczasowe pojęcie o założeniu bezbłędności punktów nawiązania [1-§18.2]. Założenie „bezbłędności punktów nawiązania” ma praktycznie sens tylko w przypadkach, kiedy zakładamy szczegółową poziomą osnowę geodezyjną 3 klasy, nawiązując ją do 1 i 2 klasy o  $m_p \leq 0,01$  m.

Jak zdecydowano w [13] każdy z punktów 3 klasy posiada wyrównane współrzędne z odpowiednio przypisanym błędem średnim. Punkty te zmaterializowane są w terenie odpowiednimi znakami do stabilizacji geodezyjnych osnow poziomych. Jednak fizycznie zaznaczony środek znaku (środek rurki, nacięty krzyż itp.) nie zawsze reprezentuje wyrównaną współrzędną punktu.

Jest tylko jedno wirtualne położenie wyrównanego punktu, mieszczące się w obszarze błędu średniego, którego praktycznie nie znamy. Załóżmy więc, że rysunek 1 przedstawia trzy centry punktów nawiązania S1, S2 i S3 na pozycjach pokrywających się ze współrzędnymi wyrównanymi oraz przyjęte przeze mnie dowolnie centry mieszczące się granicach błędów średnich. Obserwacje do wyrównań w tabeli 2 i 3 przygotowałem na wyliczeniach tych dowolnie przyjętych centrów w obszarach błędów średnich  $m_p \leq 0,05$  m i  $m_p \leq 0,10$  m oraz wyrównanych współrzędnych punktów Z1 i Z2 przedstawionych w tabeli 1.

### 2.4. Wnioski z wykonanych obliczeń

1. W zaprezentowanych tabelach, w wyniku przeprowadzonych obliczeń (wyrównań) współrzędne punktów nawiązania (stałych) nie zmieniły się, co nie oznacza bezbłędności tych punktów. Niuanse związane z tabelą 1 i wyliczeniami z podręcznika [12] zostały wyjaśnione wcześniej.

2. Clou symulacji obliczeniowych to wyniki przedstawione w tabelach 2 i 3. Błędy średnie osnowy 3 klasy, odpowiednio  $m_p \leq 0,05$  m i  $m_p \leq 0,10$  m, zawarte w obserwacjach pomiędzy punktami stałymi, zdecydowały o tym, że otrzymaliśmy różne współrzędne punktów wyrównanych Z1 i Z2 oraz różne (lecz o przewidzianej różnicy) błędy średnie.

3. Aby uzyskać wyniki wyrównywanej POS, które uwzględnią rzeczywistą wartość punktów nawiązania, musimy zadbać o jak największą liczbę obserwacji pomiędzy punktami stałymi, które później należy włączyć do obliczeń MNK. Ten postulat jest w jaskrawej sprzeczności do „wypocanej” licencji o odpłatności za każdy punkt nawiązania. Płacenie za punkty osnowy nazwałem w publikacji [14] „zbrodnią na geodezji”.

Tabela 2.

WYRÓWNANIE ŚCISŁE								
(metodą najmniejszych kwadratów)								
Ilość obserwacji nadliczbowych: 7								
PUNKTY NAWIĄZANIA								
m0= 1.0; Układ lokalny								
Numer	X	Y	mx	my	mp			
S1	1400.200	2389.750	0.000	0.000	0.000			
S2	1450.080	2550.150	0.000	0.000	0.000			
S3	1359.880	2640.360	0.000	0.000	0.000			
WSPÓLRZĘDNE PRZYBLIŻONE								
Numer	X	Y	mx	my	mp			
Z1	1249.981	2410.023	0.021	0.021	0.030			
Z2	1220.006	2590.026	0.021	0.021	0.030			
WSPÓLRZĘDNE WYRÓWNANE								
Numer	X wyr.	Y wyr.	mx	my	mp	A	B	Az A
Z1	1249.965	2410.071	0.033	0.037	0.050	0.042	0.027	142.8421
Z2	1220.024	2590.057	0.028	0.041	0.049	0.042	0.025	77.3112
KĄTY								
L	C	P	Kąt	mK	popr.	Kąt wyr.	mK w	
Z1	Z2	S3	111.4381	0.0350	0.0482	111.4863	0.0170	
S3	S2	S1	130.8322	0.0350	-0.0223	130.8099	0.0000	
ODLEGŁOŚCI								
P	K	D	mD	D zred.	popr.	D wyr.	mD w	
S1	Z1	151.630	0.041	151.6300	-0.026	151.603	0.035	
S2	Z1	244.263	0.041	244.2630	0.0074	244.270	0.027	
Z1	S3	255.182	0.041	255.1820	-0.007	255.175	0.030	
Z1	Z2	182.464	0.041	182.4640	-0.005	182.459	0.036	
S1	Z2	269.392	0.041	269.3920	0.0263	269.418	0.030	
S2	Z2	233.465	0.041	233.4650	0.0267	233.492	0.026	
S3	Z2	148.639	0.041	148.6390	-0.011	148.628	0.033	
S1	S2	167.909	0.041	167.9090	0.0677	167.977	0.000	
S2	S3	127.527	0.041	127.5270	0.0421	127.569	0.000	

Tabela 3.

WYRÓWNANIE ŚCISŁE								
(metodą najmniejszych kwadratów)								
Ilość obserwacji nadliczbowych: 7								
PUNKTY NAWIĄZANIA								
m0= 1.0; Układ lokalny								
Numer	X	Y	mx	my	mp			
S1	1400.200	2389.750	0.000	0.000	0.000			
S2	1450.080	2550.150	0.000	0.000	0.000			
S3	1359.880	2640.360	0.000	0.000	0.000			
WSPÓLRZĘDNE PRZYBLIŻONE								
Numer	X	Y	mx	my	mp			
Z1	1249.981	2410.023	0.021	0.021	0.030			
Z2	1220.006	2590.026	0.021	0.021	0.030			
WSPÓLRZĘDNE WYRÓWNANE								
Numer	X wyr.	Y wyr.	mx	my	mp	A	B	Az A
Z1	1249.983	2409.927	0.068	0.075	0.102	0.086	0.054	142.8279
Z2	1219.984	2589.927	0.057	0.083	0.101	0.087	0.052	77.1386
KĄTY								
L	C	P	Kąt	mK	popr.	Kąt wyr.	mK w	
Z1	Z2	S3	111.5372	0.0700	-0.0235	111.5137	0.0345	
S3	S2	S1	130.7240	0.0700	0.0859	130.8099	0.0000	
ODLEGŁOŚCI								
P	K	D	mD	D zred.	popr.	D wyr.	mD w	
S1	Z1	151.519	0.085	151.5190	0.0469	151.566	0.072	
S2	Z1	244.387	0.085	244.3870	-0.048	244.338	0.054	
Z1	S3	255.277	0.085	255.2770	0.0199	255.297	0.062	
Z1	Z2	182.464	0.085	182.4640	0.0186	182.483	0.073	
S1	Z2	269.343	0.085	269.3430	0.0057	269.349	0.061	
S2	Z2	233.591	0.085	233.5910	-0.082	233.509	0.053	
S3	Z2	148.648	0.085	148.6480	0.0608	148.709	0.068	
S1	S2	168.046	0.085	168.0460	-0.069	167.977	0.000	
S2	S3	127.713	0.085	127.7130	-0.143	127.569	0.000	

4. Błędy kierunków, kątów i odległości będą niejako „oderwane” od realnych wartości związanych z tymi obserwacjami, kiedy do wyrównań wejdą **obserwacje między punktami stałymi**, ponieważ mają one znaczący wpływ na sumę pvv (Ippv). Aby błąd typowego spostrzeżenia **m0** był zbliżony do 1,0 trzeba umiejętnie uzgadniać błędy obserwacji, które będą też „ogarniać” punkty nawiązania ze swoimi błędami położenia w obszarach błędów średnich. W **tabeli 2** były to wartości 0,035<sup>9</sup> i 0,041 m, a w **tabeli 3**: 0,070<sup>9</sup> i 0,085 m.

5. Należy w rozważaniach darować sobie subtelności w postaci elips błędu średniego. Na dobrą sprawę nowo wyznaczone punkty powinny mieć tak przecinające się osie wstęg wahań, aby póżosie były zbliżone do siebie, czyli aby stanowiły okręgi.

**6. Wniosek ostateczny – wyrównywane pomiarowe osnowy sytuacyjne (POS) powinny zawierać jak najwięcej obserwacji pomiędzy stałymi punktami osnowy geodezyjnej (POG), a licencyjne opłaty za te punkty powinny być zniesione w trybie natychmiastowym.**

Ciąg dalszy w następnym numerze

#### Literatura

- [1] Rozporządzenie Ministra Spraw Wewnętrznych i Administracji z dnia 9 listopada 2011 r. w sprawie standardów technicznych wykonywania geodezyjnych pomiarów sytuacyjnych i wysokościowych oraz opracowywania i przekazywania tych pomiarów do państwowego zasobu geodezyjnego i kartograficznego (Dz. U. Nr 263 poz. 1572).
- [2] Główny Geodeta Kraju ZALECENIA TECHNICZNE – Pomiar satelitarne GNSS oparte na systemie stacji referencyjnych ASG-EUPOS. Warszawa 2011.

- [3] Latoś S. 2000. „O potrzebie i kierunkach zmian niektórych przepisów w zakresie poziomych osnow geodezyjnych i szczegółowych pomiarów sytuacyjnych”. *Przegląd Geodezyjny* 3.
- [4] Doskocz A. 2005. *Ekspertyza dotycząca zasad i dokładności pomiarów wykonywanych metodą biegunową i metodą domiarów prostokątnych przy pomocy nowoczesnego sprzętu pomiarowego oraz zasad wykorzystywania wyników tych pomiarów dla potrzeb ewidencji gruntów i budynków w nawiązaniu do obowiązującej instrukcji G-4 wykonana na zlecenie GUGiK. Olsztyn.*
- [5] Doskocz A. 2008. „Analiza dokładności pomiarów sytuacyjnych wykonywanych metodą biegunową oraz domiarów prostokątnych”. *Geodesia et Descriptio Terrarum* 7(3). Olsztyn: UW-M.
- [6] PN-ISO 17123-3. 2005. *Optyka i instrumenty optyczne – terenowe procedury testowania instrumentów geodezyjnych i pomiarowych. Część 3: teodolity.*
- [7] PN-ISO 17123-4. 2005. *Optyka i instrumenty optyczne – terenowe procedury testowania instrumentów geodezyjnych i pomiarowych. Część 4: dalmierze elektrooptyczne (instrumenty EDM).*
- [8] Gajdek J. 2013. „Szczegóły pod specjalnym nadzorem” *Magazyn Nowa Geodezja w Praktyce* 4 (gajdek jerzy⇒strony domowe pracowników⇒publikacje).
- [9] Gajdek J. 2013. „Odległość budynku od granicy” *GEODETA* 8 (gajdek jerzy⇒strony domowe pracowników⇒publikacje).
- [10] Gajdek J. 1995. „Osnowy pomiarowo-realizacyjne inaczej”. *Przegląd Geodezyjny* 2.
- [11] Gajdek J. 2002. „Metoda ścisła – zmora czy błogostawieństwo, czyli o praktyce rozwijania pomiarowych osnow sytuacyjnych” *Przegląd Geodezyjny* 6.
- [12] Wiśniewski Z. 2005. *Rachunek wyrównawczy w geodezji (z przykładami)*. Wydawnictwo: UWM Olsztyn.
- [13] Rozporządzenie Ministra Administracji i Cyfryzacji z dnia 14 lutego 2012 r. w sprawie osnow geodezyjnych, grawimetrycznych i magnetycznych DzURP z 30 marca 2012 r. Poz. 352.
- [14] Gajdek J. 2017. „EGiB – trudna droga do doskonałości”. *GEODETA* 4
- [15] Kowalczyk K., Węgliński R. 2010. „Analiza przydatności pośrednich metod pomiaru szczegółów sytuacyjnych w technologii GPS RTK”. *Przegląd Geodezyjny* 9.